

Matrice

Neka su m i n pozitivni cijeli brojevi.
 $m \times n$ matrica je kolekcija od $m \cdot n$ brojeva uređenih u pravougaoni niz:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{matrix} m \text{ redova} \\ n \text{ kolona} \end{matrix}$$

Npr. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -5 \end{bmatrix}$ je 2×3 matrica, $A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 8 & 9 \\ 7 & 2 & -5 & 3 \\ 4 & -6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}_{5 \times 4}$

Brojeve u matrici zovemo elementi matrice i označavamo sa a_{ij} , gdje su i, j cijeli $1 \leq i \leq m$ i $1 \leq j \leq n$. Indeks i zovemo red indeks, a j kolona indeks.

Npr. u matrici A

$$i \begin{bmatrix} \vdots \\ \dots a_{ij} \dots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad a_{12} = \sqrt{2}, \quad a_{23} = -5, \quad a_{43} = 2, \quad a_{53} = -2$$

$1 \times n$ matricu zovemo n -dimenzionalni red vektor, $A = [a_1 \dots a_n]$
 $m \times 1$ matrica je m -dimenzionalni kolona vektor

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Sabiranje matrica: $[a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij}]_{m \times n} = [s_{ij}]_{m \times n}$

npr.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

gdje je $s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $\forall i, j$

Skalarno množenje matrice brojem:

c je realan broj $c \cdot [a_{ij}]_{m \times n} = [b_{ij}]_{m \times n}$

npr.

$$2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 6 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

gdje je $b_{ij} = c \cdot a_{ij} \forall i, j$

Brojeve ćemo često zvati skalari.

Množenje matrica:

Prvo ćemo vidjeti šta je proizvod red vektora A i kolone vektora B .

$$A \cdot B = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

npr. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = 3 - 1 + 8 = 10$

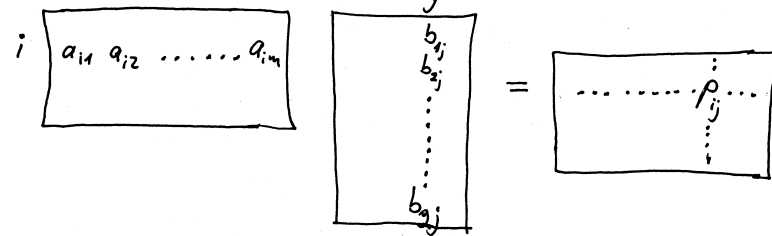
generalno:

$$[a_{ij}]_{m \times q} \cdot [b_{ij}]_{q \times s} = [p_{ij}]_{m \times s}$$

gdje je

$$p_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{iq} b_{qj}$$

ovo znači proizvod i -tog reda A i j -te kolone od B .



npr. $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Sistem linearnih jednačina $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

možemo pisati u matricnom obliku $Ax = b$, gdje A predstavlja koeficijent matricu $[a_{ij}]_{m \times n}$

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

1.) Ako je $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 10 \end{bmatrix}$ izračunati:

a) $A+B$ b) $A-B$ c) $2A-3B-I$ (I jedinična matrica)

R: a) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 11 \\ 6 & 2 & 10 \\ 6 & 3 & 17 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -4 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

c) $2 \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 7 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 10 \\ 6 & 4 & 12 \\ 2 & 2 & 14 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -3 & 18 \\ 9 & 0 & 12 \\ 15 & 6 & 30 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 11 & -8 \\ -3 & 4 & -2 \\ -13 & -4 & 13 \end{bmatrix}$

2.) Izračunati:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 & 2 \cdot 1 + 3 \cdot 5 \\ 1 \cdot 2 + 6 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 6 \cdot 5 \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 17 \\ 20 & 31 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 4 \cdot 2 & 1 \cdot 4 + 4 \cdot 5 & 1 \cdot (-2) + 4 \cdot 6 \\ 2 \cdot 1 + (-5) \cdot 2 & 2 \cdot 4 + (-5) \cdot 5 & 2 \cdot (-2) + (-5) \cdot 6 \\ 3 \cdot 1 + 6 \cdot 2 & 3 \cdot 4 + 6 \cdot 5 & 3 \cdot (-2) + 6 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 24 & 22 \\ -8 & -17 & -34 \\ 15 & 42 & 30 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = a + 2b + 3c$

3.) Ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix}$ izračunati $3A^2 - 2A^T + 5I$.

(A^T transponovana matrica matrice A) (kada elementi iz reda zamene položaj sa elementima iz kolona)

R: $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -9 & 7 \\ -3 & 7 & 4 \\ -1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$

$3A^2 - 2A^T + 5I = \begin{bmatrix} 18 & -27 & 21 \\ -9 & 21 & 12 \\ -3 & 12 & 24 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -4 & -8 & -10 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & -31 & 15 \\ -5 & 34 & 22 \\ -9 & 10 & 25 \end{bmatrix}$

4.) Ako je $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ izračunati $2 \cdot A^T \cdot A - 3 \cdot B \cdot B^T + 6I$.

R: $\begin{bmatrix} -7 & 0 & 5 \\ 0 & 23 & 43 \\ 5 & 43 & 100 \end{bmatrix}$